# Números y desigualdades

# Distintas clases de números

## Números naturales

Los números **naturales** 1,2,3,... . El conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{N}$.

## **Números enteros**

Los números **enteros** ...,-2,-1,0,1,2,... cuyo conjunto se representa por $\mathbb{Z}$.

# Números racionales

Los números **racionales** que son cocientes de la forma $p/q$ donde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, cuyo conjunto representamos por $\mathbb{Q}$.

## Números irracionales

También conoces otros números como $\sqrt{2}$, $\pi$, o el número e que no son números racionales y que se llaman, con una expresión no demasiado afortunada, ***números irracionales***.

# Números reales

El conjunto formado por todos los números racionales e irracionales se llama conjunto de los **números reales** y se representa por $\mathbb{R}$.

Es claro que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

# Axiomas de los números reales

# Axiomas algebraicos

## Propiedades asociativas

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad (x\,y)z = x(y\,z)$$

# Propiedades conmutativas

$$x + y = y + x \qquad x\,y = y\,x$$

## Elementos neutros

El $0$ y el $1$ son tan importantes que enunciamos seguidamente sus propiedades: $0 + x = x$, $1x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

## Elementos opuesto e inverso

Para cada $x \in \mathbb{R}$ hay un número real llamado *opuesto de* $x$, que representamos por $-x$, tal que $x+(-x)=0$. Para cada número real $x \neq 0$ hay un número real llamado *inverso de* $x$, que representamos por $x^{-1}$, tal que $xx^{-1} = 1$.

**Observación importante**. $-x$ no debe leerse "menos $x$" sino "opuesto de $x$".

**Propiedad distributiva.**

$$(x+y)z = xz + yz$$

## Algunas consecuencias de los axiomas algebraicos

### Esto es un teorema

- Cualquier número multiplicado por 0 es igual a 0: $0x = 0$.
- El 0 no tiene inverso. No se puede dividir por 0.
- Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que $(-x)y = -xy$.
- Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que $(-x)(-y) = xy$.

# Axiomas de orden

## Números reales positivos

Los números reales se representan como puntos de una recta en la que se fija un origen, el 0, de forma arbitraria. Los números que hay a la derecha de 0, se llaman ***positivos*** y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$.

## Ley de tricotomía

Para cada $x \in \mathbb{R}$ se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$; $x$ es positivo; $-x$ es positivo.

## Estabilidad del orden

La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

El conjunto de los números positivos se representa por $\mathbb{R}^+$.

El conjunto de los números negativos se representa por $\mathbb{R}^-$.

**Observación**. El 0 no es positivo ni negativo.

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

Escribimos también:

$$\mathbb{R}_o^- = \mathbb{R}^- \cup \{0\}, \qquad \mathbb{R}_o^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

## Relación de orden

La expresión $x < y$ quiere decir que $y - x \in \mathbb{R}^+$.

La expresión $x \leqslant y$ quiere decir que $y - x \in \mathbb{R}^+_o$.

$$x \leqslant y \iff x < y \quad \text{o} \quad x = y$$

**Reglas para trabajar con desigualdades (esto es un teorema)**

Sean $x, y, z$ números reales, entonces:

i) $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ implican que $x \leqslant z$.

ii) $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ implican que $x = y$.

iii) Se verifica exactamente una de las tres relaciones: $x < y$, $x = y$, o $y < x$.

iv) $x < y \iff x + z < y + z$.

## Reglas para trabajar con desigualdades (esto es un teorema)

v) Si $z > 0$ entonces $x < y \iff xz < yz$.

vi) Si $z < 0$ entonces $x < y \iff xz > yz$.

vii) $xy > 0$ si, y sólo si, $x$ e $y$ son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$ y, en particular, $1 > 0$.

viii) $z > 0 \iff \frac{1}{z} > 0$.

ix) Si $xy > 0$ entonces $x < y \iff \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

## Forma correcta de leer las matemáticas

Expresa con palabras lo que se afirma simbólicamente por:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \neq \frac{1}{x+y}$$

Lo que sigue es un caso particular de lo anterior:

$$\frac{1}{x+y^2} + \frac{1}{z} \neq \frac{1}{x+y^2+z}$$

***Traduce los símbolos en conceptos. Cuando leas matemáticas presta atención a los conceptos y no retengas símbolos concretos.***

# Reglas para trabajar con desigualdades en español

*Una desigualdad es equivalente a la desigualdad del mismo sentido obtenida sumando una misma cantidad a sus dos miembros.*

*Una desigualdad es equivalente a la desigualdad del mismo sentido obtenida multiplicando sus dos miembros por una misma cantidad positiva.*

*Una desigualdad es equivalente a la desigualdad de sentido opuesto obtenida multiplicando sus dos miembros por una misma cantidad negativa.*

*El producto de dos cantidades es positivo si, y sólo si, las dos cantidades son positivas o las dos son negativas.*

Observación: decir que dos desigualdades son equivalentes significa que las dos son ciertas o ninguna es cierta y que ambas se satisfacen para los mismos valores de las variables.

## Estrategia para probar desigualdades entre números positivos

- Para probar que dos números positivos son iguales es suficiente probar que sus cuadrados son iguales.

- Para probar una desigualdad entre dos número positivos es suficiente probar dicha desigualdad para sus cuadrados.

Dados $\boxed{a, b \in \mathbb{R}_o^+}$ se tiene que:

$$a = b \Longleftrightarrow a^2 = b^2 \qquad a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$$

## Valor absoluto de un número real

El **valor absoluto** de $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Por definición, $|x| \geqslant 0$ y $|x| = 0 \iff x = 0$.

## ¿Es la raíz cuadrada una función caprichosa?

$$\mathbf{1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)^2} = -1}$$

**¿Es** $\mathbf{\sqrt{x^2} = x}$ **?**

**¿Qué significa** $+\sqrt{\mathbf{5}}$ **?** **y** **¿** $-\sqrt{\mathbf{5}}$ **?** **y** **¿** $\pm\sqrt{\mathbf{5}}$ **?**

La raíz cuadrada de un número real positivo es siempre positiva

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

## Propiedades del valor absoluto

i) $|x\,y| = |x||y|$ (Leer: el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos)

ii) $|x| \leqslant \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$

iii) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $x$ e $y$ son los dos positivos o los dos negativos **(desigualdad triangular)**.(Leer: el valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos. La igualdad se da cuando todos los sumandos son positivos o todos son negativos)

## Desigualdad de las medias

Cualesquiera sean los números positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ se verifica que:

$$\boxed{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}}$$

Además

$$\boxed{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_n}$$

## Intervalos

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x\in\mathbb{R} : a\leqslant x\leqslant b\} \quad \text{(intervalo cerrado)}\\
]a,b[ &= \{x\in\mathbb{R} : a< x< b\} \quad \text{(intervalo abierto)}\\
[a,b[ &= \{x\in\mathbb{R} : a\leqslant x< b\}\\
]a,b] &= \{x\in\mathbb{R} : a< x\leqslant b\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
]-\infty, c[ &= \{x \in \mathbb{R} : x < c\} \\
]-\infty, c] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} \\
]c, +\infty[ &= \{x \in \mathbb{R} : x > c\} \\
[c, +\infty[ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant c\}
\end{aligned}
$$

Finalmente, la recta real $\mathbb{R}$, es también un intervalo. Hay caprichosos a quienes les gusta escribir $\mathbb{R}=]-\infty, +\infty[$.

**Desigualdades entre polinomios.** Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable $x$ se verifica que $p(x) > 0$.

En este tipo de ejercicios hay que tener en cuenta el siguiente resultado.

> *Una función polinómica solamente puede cambiar de signo en los puntos donde se anula, y por tanto entre cada par de raíces* ***consecutivas*** *dicha función es siempre positiva o siempre negativa.*

**Ejemplo.** Calcula para qué valores de $x$ se verifica que

$$-6 - 19x + 28x^2 + 2x^3 - 6x^4 + x^5 > 0.$$

Si nos piden estudiar para qué valores de la variable $x$ se verifica una desigualdad del tipo $p(x) < q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, basta observar que la desigualdades $p(x) < q(x)$ y $q(x) - p(x) > 0$ son equivalentes y que $q(x) - p(x)$ es una función polinómica por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

**Observación importante.** Podemos usar el hecho de que las desigualdades $ab \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ son equivalentes cuando $a \geqslant 0$ para simplificar el estudio del signo de una función polinómica.

*Una función polinómica cambia de signo en las raíces reales de orden impar y no cambia de signo en las raíces de orden par.*

**Ejemplo.** Calcula para qué valores de $x$ se verifica que

$$p(x) = (x+2)^3(x+1)^2x(x-1)^5(x-4)^6(x^2+x+1) > 0.$$

**Desigualdades entre funciones racionales.** Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable $x$ se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$. Se supone que los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes.

En este tipo de ejercicios hay que tener en cuenta el siguiente resultado.

> *Una función racional solamente puede cambiar de signo en los puntos donde se anula el numerador o el denominador, y por tanto entre cada par de dichos puntos* ***consecutivos*** *dicha función es siempre positiva o siempre negativa.*

Otra forma de resolver desigualdades entre funciones racionales consiste en observar que una desigualdad del tipo $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$ es equivalente a la desigualdad $p(x)q(x) > 0$, la cual ya sabemos resolver porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

**Ejemplo.** Calcula para qué valores de $x$ se verifica que

$$R(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} > 0.$$

## Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

- Igualdades del tipo $|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$. Como consecuencia de la desigualdad triangular, la igualdad $|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $f(x)g(x) \geqslant 0$.
- Una igualdad del tipo $|f(x)| = |g(x)|$ es equivalente a la igualdad $(f(x))^2 = (g(x))^2$; y también es equivalente a que se verifique alguna de las igualdades $f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x)$.

- Una igualdad del tipo $|f(x)| = g(x)$ es equivalente a que se verifique alguna de las igualdades $f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x)$, y además que se verifique $g(x) \geqslant 0$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $(f(x))^2 \leqslant (g(x))^2$.

- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ también puede estudiarse calculando los valores de $x$ para los que se da la igualdad $|f(x)| = |g(x)|$, es decir, los puntos en que se anula la función $h(x) = |f(x)| - |g(x)|$. Estos puntos determinan intervalos en los que la función $h(x)$ tiene signo constante.

- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant g(x)$ es equivalente a que se verifiquen las dos desigualdades $-g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, y además que se verifique $g(x) \geqslant 0$.

- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \geqslant g(x)$ se verifica para los valores de $x$ tales que $g(x) < 0$; y para aquellos valores de $x$ para los que $g(x) \geqslant 0$ es equivalente a que se verifique alguna de las dos desigualdades $f(x) \leqslant -g(x)$, $f(x) \geqslant g(x)$.

**Observación importante.** Las reglas anteriores se aplican exactamente igual para igualdades o desigualdades en las que intervienen más de una variable.

Por ejemplo, una igualdad del tipo

$$|f(x,y)+h(z)|=|f(x,y)|+|h(z)|$$

es equivalente a la desigualdad $f(x,y)h(z)\geqslant 0$.

Es posible que esta última desigualdad no pueda simplificarse, en cuyo caso debemos dejarla indicada tal como está.

En general, para resolver igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos se deben considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.

**Ejemplo.** Calcula para qué valores de $x$ se verifica la igualdad

$$\left|x^2 - 6x + 8\right| = x - 2.$$

**Ejemplo.** Calcula para qué valores de $x$ se verifica la desigualdad

$$\left|\frac{x-2}{x^2-2x-1}\right| > \frac{1}{2}.$$

**Ejemplo.** Calcula para qué valores de $x$ se verifica la igualdad

$$|x^2+3x-9| = |x^2+x-6| + |2x-3|\,.$$

**Ejemplo.** Calcula para qué valores de $x$ se verifica la desigualdad

$$|x^2 - 6x + 5| > |x^2 + 2x - 5|.$$

**Ejemplo.** Calcula para qué valores de $x$ se verifica la desigualdad

$$|-x + |x - 1|| < 2.$$

**Ejemplo.** Calcula para qué valores de $x$ se verifica la siguiente desigualdad.

$$|x+1|+|x^2-3x+2|<4.$$

Seguidamente vamos a ver dos bonitos ejemplos de aplicación de la desigualdad de las medias.

**Ejemplo.** Prueba que el cuadrado es el rectángulo de máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.

**Ejemplo.** Prueba que el triángulo equilátero es el triángulo que tiene máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.

**Sugerencia**. Si $a, b, c$ son las longitudes de los lados y $p = (a + b + c)/2$ es el semiperímetro, entonces, según la fórmula de Heron de Alejandría, el área, $A$, viene dada por $A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$.

**Observación importante.** En Análisis Matemático trabajamos con precisión infinita y ***nunca jamás usamos decimales*** (excepto en problemas de cálculo de valores aproximados que ya veremos en su momento). *Esto quiere decir que las raíces, los logaritmos, las exponenciales y otras funciones no se calculan, se dejan expresados simbólicamente.* En Análisis $\sqrt{2}$ no es igual a $1 \cdot 414213562373095048$; $\log 2$ no es igual a $0 \cdot 693147180559945 3$. *No uséis decimales en esta asignatura.*